発散のないmodelの試作(10)

著者	古尾谷 泉
出版者	法政大学多摩研究報告編集委員会
雑誌名	法政大学多摩研究報告
巻	23
ページ	77-88
発行年	2008-03-30
URL	http://hdl.handle.net/10114/7380

法政大学多摩研究報告　23：77～88, 2008

発散のない model の試作（X）

古尾谷　泉

An attempt toward a non-divergent model (X)

Izumi FURUOYA

1. はじめに

この論文の目的は、簡単な例を用いて、我々の model では、粒子の自己 energy の発散はおきない、すなわち、粒子の質量の radiative correction の理論値は無限大にはならないことを示すことである。我々の model では以下の要請をおく。

古典的な意味で、粒子の電荷は相互作用によって変わってはならない恒常的不変量である。

まず、この要請の意味する内容について簡単に説明しておこう。従来の理論では、電荷電流密度は、Lorentz 変換に対する vector であるから、それは 4 成分から成り、(j^0, j^i), $i=1, 2, 3$, とあらわすことが出来る。ここで、$j^0=\rho$ は電荷密度であり、また、j^i, $i=1, 2, 3$,は電流密度である。これらの成分の値は Lorentz 変換の座標軸を変えると変わってしまう。例えば、座標軸をうまくとれば、$j^0=\rho \fallingdotseq 0$ および、$j^i=0$, $i=1, 2, 3$, とすることも出来る。このように、座標軸を固定して、電荷のみを取り出して議論することも可能であろう。しかし、物理的最終結果は座標系の取り方によって変わってはならないから、ここでは、電荷電流密度を、Lorentz 座標系に依存しない以下の一般的な形に書き直しておこう。

$$e^2\|j\|^2=e^2\eta_{ab}j^a j^b,\quad a, b=0, 1, 2, 3, \tag{1}$$

ここで、η_{ab} は Minkowski 空間の metric tensor である。このように、電荷の不変性の要請は $e\|j\|$ の不変性の要請と同じことなのである。しかし、我々は Eq.(1)を直接議論の対象にするわけではない。Eq.(1)は、我々の model に拡張しておかなければならない。

前論文で、量子論における基礎理論は radiative correction の背後にかくれてしまっていて、その真の姿を見ることは出来ない。もし、そうでないとすると、裸の粒子の電荷 e_0 や質量 m_0

は直接測定可能のはずだからである。そして、その理論的予見が従来の精度のよい理論値を乱さない限り、基礎理論は修正可能であろうという点について議論した。

そこで、我々は、その許される範囲内で、従来の理論を以下のように修正しよう。まず、Minkowski space の次元を拡げて、6 次元（準）ユークリッド空間とし、その拡げた空間内に、後述の Eq.(3)の不変線素 ds を内部に持つ 5 次元超曲面をうめ込む。そして、その 5 次元超曲面を我々の model space、すなわち、物理空間とする。このようにして、我々の model space は 5 次元なのだから、この空間内の電荷電流密度は 5 次元空間の vector となり、5 つの成分をもつ。したがって、従来の 4 成分 $(j^0,\ j^i)$, $i=1,\ 2,\ 3,$ の他に新しい成分 j^ξ を加えて、我々の model space における電荷電流密度を $(j^\xi,\ j^0,\ j^i)$, $i=1,\ 2,\ 3,$ とかくことにする。ここで、j^ξ は我々の model space における相互作用による電荷電流密度の増分をあらわす成分である。このとき、我々の model space における電荷電流密度を、Eq.(1)を拡張して

$$e^2\|j\|^2 = e^2 g_{\lambda\mu}\, j^\lambda j^\mu, \quad \lambda,\ \mu=\xi,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{2}$$

と定義しよう。

次に、我々の model space に相互作用を導入しよう。この際我々は古典的な意味で荷電不変性の要請を満たさなければならないから、この要請を満たすように、いいかえれば、Eq.(2)を不変とするような形で、従来の minimal な相互作用を 5 次元超曲面上に拡張することを試みよう。そして最後に、このようにして導入された相互作用を用いて、我々の model では自己 energy の発散はおきないことを簡単な例を用いて示そう。

ここで、我々の model space について簡単に触れておこう。Newton 力学では光の速さの理論値は無限大と考えてよかろう。一方、相対論では光の速さは有限ではあるが恒常的不変量である。いいかえると、Newton 力学における物理空間は光の速さが無限大となるような時空構造をもつ。これに反して、相対論では光の速さは有限ではあるが、しかし、恒常的不変量となるような時空構造をもつ。相対論における力学はこのような物理空間内での物理なのである。現在の場の理論では、粒子の電荷と質量の理論値は無限大になってしまう。我々の仕事は、従来の時空構造を修正して、電荷を相対論的立場から眺めた時空空間を構築して、その空間内での物理理論を作る試みである。このとき、我々の model における荷電不変性の要請の数学的表現は Eq.(2)であたえられるものとする。

2. 我々の model における相互作用

前に述べたように、我々の model space、すなわち、物理空間は 6 次元ユークリッド空間にうめ込まれた 5 次元超曲面であって、その超曲面上に、時空座標 $(t,\ \boldsymbol{x})$ の他に新しい座標 ξ を加

えて、不変無限小距離

$$-ds^2 = d\xi^2 + a^2 e^{-\frac{2\xi}{a}}(-dt^2 + d\boldsymbol{x}^2), \tag{3}$$

があたえられているものとする。次に、この超曲面上で、以下の 5 次元 energy momentum を導入する

$$g^{\xi} = \mu\frac{d\xi}{ds},\ q^0 = \mu\frac{dt}{ds} \quad \text{および} \quad q^i = \mu\frac{dx^i}{ds},\ i = 1,\ 2,\ 3, \tag{4}$$

ここで、$(q^0,\ q^i)$, $i = 1,\ 2,\ 3$, は通常の理論における 4 次元 energy momentum $(E,\ \boldsymbol{p})$ に対応するものであり、また、新しく導入された q^{ξ} は我々の model space における相互作用に対応し、ξ 方向の変移を誘導するものである。Eq.(3) より $(q^{\xi},\ q^0,\ q^i)$, $i = 1,\ 2,\ 3$, の間には

$$-\mu^2 = (q^{\xi})^2 + a^2 e^{-\frac{2\xi}{a}}\left(-(q^0)^2 + (q^i)^2\right), \tag{5}$$

の関係のあることがわかる。

Eq.(3) より、我々の model space における metric tensor は

$$(g_{\lambda\mu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -a^2 e^{-\frac{2\xi}{a}} & & & \\ & & a^2 e^{-\frac{2\xi}{a}} & & \\ & & & a^2 e^{-\frac{2\xi}{a}} & \\ & & & & a^2 e^{-\frac{2\xi}{a}} \end{pmatrix},$$

$$\text{および} \quad (g^{\lambda\mu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -\frac{1}{a^2} e^{\frac{2\xi}{a}} & & & \\ & & \frac{1}{a^2} e^{\frac{2\xi}{a}} & & \\ & & & \frac{1}{a^2} e^{\frac{2\xi}{a}} & \\ & & & & \frac{1}{a^2} e^{\frac{2\xi}{a}} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

となる。

特殊相対論では、Minkowski space の metric tensor を $(\eta_{ab}) = (\eta^{ab}) = sign(-1,\ 1,\ 1,\ 1)$ とすると、vector $\boldsymbol{A}$ の反変成分 A^a と共変成分 A_a との間には $A^a = \eta^{ab} A_b$ または $A_a = \eta_{ab} A^b$ なる関係がある。このように、特殊相対論における vector の反変成分と共変成分とでは符号が異なる。我々の model では、vector の $\boldsymbol{v}$ の反変成分 v^{λ} と共変成分 v_{λ} との間には、Eq.(6)の metric tensor を用いて、$v^{\lambda} = g^{\lambda\mu} v_{\mu}$、または、$v_{\lambda} = g_{\lambda\mu} v^{\mu}$ の関係がある。これを具体的に書けば、$v_{\xi} = v^{\xi}$、$v_0 = (-)a^2 e^{-\frac{2\xi}{a}} v^0$、および $v_i = a^2 e^{-\frac{2\xi}{a}} v^i$、となる。このように、我々の model space では、vector の反変成分と共変成分とは符号ばかりではなくその大きさも異なる。このようにして、我々の model では、tensor の反変成分と共変成分とでは世界が全く異なるのである。Eq.(5)を共変成分でかけば

$$-\mu^2 = q_\xi^2 + \frac{1}{a^2} e^{\frac{2\xi}{a}} (-q_0^2 + q_i^2), \tag{7}$$

となる。

次に、通常の理論で核子が中間子を放出する場合について考察しよう。図１に示されたように、核子の始状態を $(E_p,\ \boldsymbol{p})$、中間子を放出後の核子の終状態を $(E'_p,\ \boldsymbol{p}')$ とする。また、核子から放出された中間子の 4-momentum を $(k_0,\ \boldsymbol{k})$ とする。このとき

energy 保存則から　$E_{p'} = E_p - k_0,$　(8)

momentum 保存則から　$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k},$　(9)

である。一方、$(E_p,\ \boldsymbol{p})$ と $(E_{p'},\ \boldsymbol{p}')$ とは自由な核子の energy と momentum であるから

$$m^2 = E_p^2 - \boldsymbol{p}^2 = E_{p'}^2 - \boldsymbol{p}'^2, \tag{10}$$

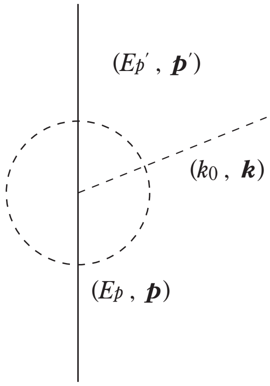

図１

を満たす。このとき、云うまでもないことだが、変化 $(E_p,\ \boldsymbol{p}) \to (E_{p'},\ \boldsymbol{p}')$ は相互作用による変化であって、座標軸は固定してあるのだから、homogeneous Lorentz 変換によるものではない。したがって、この変化を Poincaré 変換の自由度であらわせば、momentum space における並進に対応するものである。このことから、Eq.(8) と Eq.(9) とは、まとめて

$$\begin{pmatrix} E_p \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k_0 \\ -\boldsymbol{k} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

とあらわすことが出来る。このようにして、minimal な相互作用[注] は Poincaré 変換の homogeneous Lorentz 変換による剰余空間であることがわかる。

以上のことをふまえて、我々の model に相互作用を導入しよう。我々の model space における $(\xi,\ t,\ \boldsymbol{x})$ の変換を S とすると Eq.(3) (or Eq.(5)) はこの S の作用によって不変である。一方、部分空間 $(t,\ \boldsymbol{x})$ の変換を S_0 とすると、この S_0 の作用によって

$$(q^0,\ q^i) \to (q^{0'},\ q^{i'}) \quad \text{および} \quad q^\xi = q^{\xi'}, \tag{12}$$

と変換するが、Eq.(5)から

$$-q^{0^2} + q^{i^2} = -q'^2_0 + q'^2_i, \tag{13}$$

となるから、この S_0 は homogeneous Lorentz 変換に相当する。そこで、我々の model space における相互作用 S' を、Eq.(11)を拡張して

$$S' = S \big/ S_0, \tag{14}$$

で定義しよう。

注）ここで、“minimal”とは厳密な定義に基づいて使用しているわけではない。

前に述べたように、我々の model における電荷電流密度 (j^{λ}), $\lambda=\xi$, 0, 1, 2, 3, は変換 S に対して vector であり、その大きさ、すなわち、Eq.(2)の $e\|j\|$ は S の作用によって不変である。今、初期値は $j^{\xi}=0$ とし、また $j^{i}=j'^{i}=0$ 、 $i=1$, 2, 3, となるように座標軸をとれば、相互作用 S' の作用によって、Eq.(2)の不変性から、仮想粒子による“ゆらぎ”の効果を無視すれば、

$$e^2(j^0)^2=e^2\left((j'^0)^2+(j'^{\xi})^2\right), \tag{15}$$

となるであろう。ここで、 j'^{ξ} は相互作用による電荷密度の増加分である。このようにして、Eq.(15)の電荷密度は、我々の model では、相互作用の前後で、電荷の値は変わらないことを示している。

図 1 で、放出される中間子は仮想的な粒子であって、このような粒子に対しては energy 保存則は成立しない。いいかえると、$(k_0, \boldsymbol{k})$ は Lorentz 変換に対して 4-vector を成すが、しかし、shell 上にはない。すなわち

$$-k_0^2 + \boldsymbol{k}^2 \fallingdotseq 0, \tag{16}$$

である。しかし、仮に vertex 上に potential “V” が存在して

$$\text{“V”} = k_0^2 - \boldsymbol{k}^2, \tag{17}$$

が成立すれば、$(k_0, \boldsymbol{k})$ は energy 保存則をも満たすから、核子は real な中間子の放出が可能となる。ここで述べたことを我々の model で考えよう。我々の model で、相互作用はゆっくりと入ると仮定すると、 $q^{\xi}\cong 0$ としてよいから、Eq.(5)から

$$q^{0^2}-q^{i^2}=(\mu^2+q^{\xi^2})e^{\frac{2\xi}{a}}\cong\mu^2e^{\frac{2\xi}{a}}, \tag{18}$$

となるが、Eq.(17)と Eq.(18)とを比較すれば $e^{\frac{2\xi}{a}}$ は potential “V” と等価であることがわかる。ξ が小さいとすると、 $e^{\frac{2\xi}{a}}\cong 1+\dfrac{2\xi}{a}$ であり、potential の微分は力であるから、ξ は我々の model における力に対応していることがわかる。一方、重力理論では、metric tensor が potential であることを考えると、我々の理論は重力理論と論理構造が同じであるといってよかろう。

我々は発散の困難を避ける目的で、従来の理論における minimal な相互作用を 5 次元超曲面上に拡張することを試みてきた。しかし、この新しい相互作用の正当性については、現時点では何ともいえない。これは今後の研究課題である。今後、相互作用を修正しなければならないことはあり得ることで、これは超曲面の選択の問題でもある。相互作用の正しい形は実験との比較によって決定されなければならない。

更に、系全体の energy と momentum は厳密に保存されなければならないから、6 次元（準）ユークリッド空間内の系全体の並進の自由度は許されなければならないと考えるのは自然のなりゆきであろう。しかし、6 軸方向の並進の自由度をすべて許すことになれば、6 個の厳密に成り立つ保存量が存在することになる。このとき、系全体の energy および momentum の 4 個の保

存量の他に、2個の新しい厳密に成り立つ保存量が存在することになる。

3. 自己 energy における発散の消失

次に、この論文の主目的、すなわち、我々の model では、粒子の自己 energy の積分は発散しないことを簡単な例を用いて示そう。

通常の理論で、無限に重い核子が中間子を仮想的に放出し、再び、それを吸収する際の質量の増加は、攝動の2次までで

$$\Delta E \sim g^2 \int \frac{d\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k}^2 + m^2}, \tag{19}$$

であたえられる。(注) 図2はこの過程をあらわす Feynman 図である。$\boldsymbol{k}$ は核子から放出後、再び吸収される仮想的な中間子の運動量である。ここでは、核子の質量は無限に重いと仮定しているので核子の反跳はおきない。したがって、この過程での核子の運動量の変化は考えなくてもよい。Eq.(19)の自己 energy の積分、すなわち、中間子の probagator の $\boldsymbol{k}$ についての積分は、明らかに一次の発散積分である。

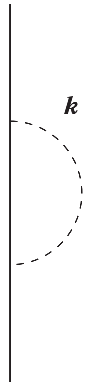

図2

次に、上述の簡単な例を我々の model で議論しよう。まず、そのための準備として、我々の model space における中性 scalar 粒子―中性中間子―の方程式を解くことから始めよう。我々の model における scalar 粒子の方程式は、$\phi(\xi)$ をその波動関数として、

$$\begin{aligned} \square\phi &= g^{\lambda\mu}\nabla_\lambda\nabla_\mu\phi \\ &= g^{\lambda\mu}(\partial_\lambda\partial_\mu + \Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}\partial_\nu)\phi = 0,\ \lambda,\ \mu = \xi,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \end{aligned} \tag{20}$$

であたえられるものとする。ここで、$\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}$ は Christoffel の記号

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}(\partial_\lambda g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\lambda\rho} - \partial_\rho g_{\lambda\mu}), \tag{21}$$

である。Eq.(6)の metric tensor を用いると

$$\Gamma_{0\xi}^{\ \ 0} = \Gamma_{\xi 0}^{\ \ 0} = \Gamma_{1\xi}^{\ \ 1} = \Gamma_{\xi 1}^{\ \ 1} = \Gamma_{2\xi}^{\ \ 2} = \Gamma_{\xi 2}^{\ \ 2} = \Gamma_{3\xi}^{\ \ 3} = \Gamma_{\xi 3}^{\ \ 3} = (-)\frac{1}{a},$$

$$\text{および}\quad (-)\Gamma_{00}^{\ \ \xi} = \Gamma_{11}^{\ \ \xi} = \Gamma_{22}^{\ \ \xi} = \Gamma_{33}^{\ \ \xi} = ae^{-\frac{2\xi}{a}},\ \text{他の}\ \Gamma = 0, \tag{22}$$

となる。また、5次元体積は

注）マントル、電磁量子力学

$$dv=\sqrt{|g_{\lambda\mu}|}=e^{-\frac{2\xi}{a}}d\xi dtd\boldsymbol{x}, \tag{23}$$

である。これらのΓを用いると、Eq.(20)は

$$\Box\phi=\left\{\left(\partial^{\xi^2}+\frac{4}{a}\partial^{\xi}\right)+a^2e^{-\frac{2\xi}{a}}(-\partial^{0^2}+\partial^{i^2})\right\}\phi(\xi x)=0, \tag{24}$$

となる。Eq.(24)を変数分離の方法で解こう。

$$\phi(\xi x)=\phi(\xi)\phi(x),\ \ x=x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3, \tag{25}$$

とおいて、これをEq.(24)に代入すれば、Eq.(24)は以下の2つの方程式に分かれる。

$$(\partial^{0^2}-\partial^{i^2}+\mu)\phi(x)=0, \tag{26}$$

$$\left(\partial^{\xi^2}+\frac{4}{a}\partial^{\xi}+a^2e^{-\frac{2\xi}{a}}\mu\right)\phi(\xi)=0。 \tag{27}$$

Eq.(26)はよく知られたKlein Gordonの方程式である。

$$\phi(x)=\phi_{q^0}(x^0)\phi_{q^1}(x^1)\phi_{q^2}(x^2)\phi_{q^3}(x^3), \tag{28}$$

とおき、ϕ_{q^0}, ϕ_{q^1}, ϕ_{q^2}, ϕ_{q^3}, の固有値を、それぞれ、q^0, q^1, q^2, q^3, とすれば、Eq.(26)は以下の4個の方程式に分離する

$$(\partial^{0^2}+q^{0^2})\phi_{q^0}=0,\quad(\partial^{1^2}+q^{1^2})\phi_{q^1}=0,$$
$$(\partial^{2^2}+q^{2^2})\phi_{q^2}=0,\quad(\partial^{3^2}+q^{3^2})\phi_{q^3}=0。 \tag{29}$$

Eq.(28)をEq.(26)に代入し、Eq.(29)を使えば、

$$\mu=q^{0^2}-q^{i^2},\ \ q^{i^2}=q^{1^2}+q^{2^2}+q^{3^2}, \tag{30}$$

なる関係が得られる。ここで、$\phi_{q^i}(x^i)$, $i=1, 2, 3$, の定義域を一辺Lの立方体の箱内に制限し、その壁の所で$\phi_{q^i}(x^i)$が周期的境界条件を満たすとすると規格化された直交基底

$$\phi_{q^0}(x^0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iq^0x^0},\ \ \phi_{q^i}(x^i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iq^ix^i},\ \ i=1,\ 2,\ 3, \tag{31}$$

が得られる。すなわち、これらは

$$\int\phi^*_{q^0}(x^0)\phi'_{q^{0'}}(x^0)dx^0=\delta_{q^0q^{0'}},\ \ \sum_{q^0}\phi_{q^0}(x^0)\phi_{q^0}(x^{0'})=\delta(x^0-x^{0'}), \tag{32}$$

$$\int\phi^*_{q^i}(x^i)\phi_{q^{i'}}(x^i)dx^i=\delta_{q^iq^{i'}},\ \ \sum_{q^i}\phi_{q^i}(x^i)\phi^*_{q^i}(x^{i'})=\delta(x^i-x^{i'}), \tag{33}$$

をみたす。

次にEq.(27)を摂動で解こう。そのためには$\phi(\xi)$を展開するための完全直交基底が必要である。そこで、まず、考えられるのはHを固有値として方程式

$$\Lambda^{\xi}\phi_h(\xi)=H\phi_h(\xi),\ \ \Lambda^{\xi}\equiv\partial^{\xi^2}+\frac{4}{a}\partial^{\xi}, \tag{34}$$

を解くことであろう。しかし、この方程式の解を基底として採用することは適切ではないであ

ろう。というのは、Λ^{ξ} は hermitian operator ではないからである。そこで、Λ^{ξ} を hermitian operator

$$\hat{\Lambda}^{\xi} = \partial^{\xi^2} + i\frac{4}{a}\partial^{\xi},\ i = \sqrt{-1}, \tag{35}$$

でおきかえた方程式

$$(\hat{\Lambda}^{\xi} + H)\phi_h(\xi) = 0, \tag{36}$$

について考えよう。Eq.(36)を解くために

$$\phi_h(\xi) = A_h e^{ih\xi}, \tag{37}$$

とおいて、これを Eq.(36)に代入すれば

$$(h^2 + \frac{4}{a}h - H)\phi_h(\xi) = 0, \tag{38}$$

となり、これより

$$h^2 + \frac{4}{a}h - H = \left(h + \frac{2}{a}\right)^2 - D_h = 0,\ D_h \equiv H + \left(\frac{2}{a}\right)^2, \tag{39}$$

となるが、Eq.(39)を h について解いて

$$h = -\frac{2}{a} \pm \sqrt{D_h}, \tag{40}$$

が得られる。$\hat{\Lambda}^{\xi}$ が hermitian であるためには $\phi_h(\xi)$ が周期的な境界条件を満たさなければならない。そこで、図3に示されたように原点 O から左右に等しい長さ $\left(-\frac{L'}{2},\ \frac{L}{2}\right)$ をとり、$\phi_h(\xi)$ は境界条件

$$\phi_h\left(-\frac{L'}{2}\right) = \phi_h\left(\frac{L}{2}\right), \tag{41}$$

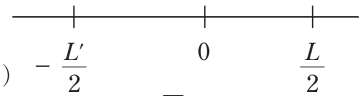

図3

を満たすものとする。しかし、L と L' とは原子スケールの大きさであり、これら2つの微小量の差 $L'-L$ と宇宙的スケールの大きさの a との比 $L'-L/a$ は零とみなしてよいであろう。このことと、Eq.(3)の不変性とから

$$\frac{L'}{2} = e^{-\frac{1}{a}\left(-\frac{L'}{2}+\frac{L}{2}\right)}\frac{L}{2} \cong \left(1 - \frac{L'-L}{2a}\right)\frac{L}{2} \cong \frac{L}{2}, \tag{42}$$

と近似しよう。この近似のもとで、Eq.(36)は壁の所 $\left(-\frac{L}{2},\ \frac{L}{2}\right)$ での周期性により

$$e^{-i\frac{L}{2}h} = e^{i\frac{L}{2}h} \quad \text{したがって} \quad e^{ihL} = 1, \tag{43}$$

を満たさなければならない。このことにより、h は次の値に制限されることになる

$$h = \frac{2\pi}{L}m,\ m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots, \tag{44}$$

このとき

$$\int \phi^*(\partial^{\xi^2}\varphi)\,d\xi = (\phi^*(\partial^{\xi}\varphi) - (\partial^{\xi}\phi^*)\varphi)\Big|_{-L/2}^{L/2} + \int (\partial^{\xi^2}\phi^*)\varphi d\xi$$

および

$$\int \phi^* i(\partial^\xi \varphi)\,d\xi = \phi^* \varphi\Big|_{-L/2}^{L/2} + \int (i\partial^\xi \phi)^* \varphi d\xi = \int (i\partial^\xi \phi)^* \varphi d\xi$$

であるから

$$\int \phi^* (\hat{\Lambda}^\xi \varphi)\,d\xi = \int (\hat{\Lambda}^\xi \phi)^* \varphi d\xi, \tag{45}$$

が成立して、$\hat{\Lambda}^\xi$ は hermitian operator であることがわかる。ちなみに Λ^ξ は

$$\hat{\Lambda}^\xi = e^{-i\frac{4}{a}\xi}\partial^\xi (e^{i\frac{4}{a}\xi}\partial^\xi), \tag{46}$$

ともかける。

次に、Eq.(37)は

$$\int \phi^*_{h'}(\xi)\,\phi_h(\xi)\,d\xi = A^*_{h'} A_h \int e^{i(h-h')\xi} d\xi = 2\pi A^*_{h'} A_h \delta_{h'h}, \tag{47}$$

となるから

$$\phi_h(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ih\xi}, \tag{48}$$

は規格化直交条件をみたす。

また、$\Phi(\xi)$ を ξ の任意の関数として、$\Phi(\xi)$ を $\phi_h(\xi)$ で展開する、すなわち

$$\Phi(\xi) = \sum_{h'} a_{h'} \phi_{h'}(\xi), \tag{49}$$

として、Eq.(49)の左から ϕ^*_h をかけて ξ で積分すると、$\phi_h(\xi)$ の規格化直交条件を使って

$$\int \Phi(\xi)\,\phi^*_h(\xi)\,d\xi = \sum_{h'} a_{h'} \int \phi^*_{h'} \phi_h\,d\xi = \sum_{h'} a_{h'} \delta_{h'h} = a_h, \tag{50}$$

すなわち、

$$a_h = \int \Phi(\xi)\,\phi^*_h(\xi)\,d\xi, \tag{51}$$

となる。これより

$$\Phi(\xi) = \sum_h a_h \phi_h = \int \sum_h \phi_h(\xi)\,\phi^*_h(\xi')\,\Phi(\xi')\,d\xi', \tag{52}$$

となるから

$$\sum_h \phi_h(\xi)\,\phi^*_h(\xi') = \delta(\xi - \xi'), \tag{53}$$

をうる。これらをまとめると

$$\int \phi^*_{h'}(\xi)\,\phi_h(\xi)\,d\xi = \delta_{h'h},$$

および

$$\sum_h \phi_h(\xi)\,\phi^*_h(\xi') = \delta(\xi - \xi'), \tag{54}$$

となる。以上まとめると、Eq.(31)およびEq.(48)は我々の model space における完全規格化直交基底をなす。

次に、我々のなすべき仕事は、Eq.(27)を解くことである。ここで、取り扱いを簡単にするために、Eq.(27)とEq.(36)における微分operatorの一次の微分項は小さいものとして無視しよう。したがって、我々の解くべき方程式は、Eq.(27)より

$$\left(\partial^{\xi^2}+a^2 e^{-\frac{2\xi}{a}}\mu\right)\Phi(\xi)=0, \tag{55}$$

となる。$\Phi(\xi)$ を $\phi_h(\xi)$ で展開し、すなわち

$$\Phi(\xi)=\sum_h a_h \phi_h(\xi), \tag{56}$$

とおいて、これをEq.(55)に代入し、更に、$\phi_h(\xi)$ は

$$(\partial^{\xi^2}+h^2)\phi_h(\xi)=0, \tag{57}$$

を満たすことを考慮すれば、Eq.(55)は

$$\sum_h a_h\left((-)h^2+a^2 e^{-\frac{2\xi}{a}}\mu\right)\phi_h(\xi)=0, \tag{58}$$

となる。Eq.(58)の左から $\phi^*_{h'}(\xi)$ をかけて ξ で積分し、h と h' とを入れかえれば

$$\sum_h a_h\left((-)h^2\delta_{hh'}+a^2 < h\left|e^{-\frac{2\xi}{a}}\right|h' > \mu\right)=0, \tag{59}$$

をうる。これより、

$$a_h h^2=\sum_{h'} a_{h'} a^2 < h\left|e^{-\frac{2\xi}{a}}\right|h' > \mu \tag{60}$$

となるが、これはまた

$$h^2=\sum_{h'} b_{h'} a^2 < h\left|e^{-\frac{2\xi}{a}}\right|h' > \mu, \quad b_{h'}\equiv\frac{a_{h'}}{a_h}, \tag{61}$$

ともかける。ここで、Eq.(61)のmatrix elementを計算しておこう。Eq.(48)を用いて、

$$\begin{aligned} &< h\left|e^{-\frac{2}{a}\xi}\right|h > \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda^0}^{\Lambda} d\xi e^{(i(h'-h)-\frac{2}{a})\xi} \\ &=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(h'-h)-\frac{2}{a}}e^{(i(h'-h)-\frac{2}{a})\xi}\Big|_{\Lambda_0}^{\Lambda} \\ &=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(h'-h)-\frac{2}{a}}\left(e^{(i(h'-h)-\frac{2}{a})\Lambda}-e^{(i(h'-h)-\frac{2}{a})\Lambda_0}\right), \end{aligned} \tag{62}$$

となる。Eq.(62)の積分の下限 Λ_0 は $q^{0^2}-q^{i^2}$ の最小値に対応する値である。簡単のためにmatrix elementの対角要素のみを考慮すれば

$$< h \left| e^{-\frac{2\xi}{a}} \right| h > = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{a} \left(e^{-\frac{2}{a}\Lambda_0} - e^{-\frac{2}{a}\Lambda} \right), \tag{63}$$

となる。Eq.(63)は

$$\Lambda \to \infty \quad \text{のとき} \quad < h \left| e^{-\frac{2\xi}{a}} \right| h > = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{a} e^{-\frac{2}{a}\Lambda_0}, \tag{64}$$

となる。したがって、Eq.(61)より

$$h^2 = a^2 < h \left| e^{-\frac{2\xi}{a}} \right| h > \mu = \frac{a}{\pi} e^{-\frac{2}{a}\Lambda_0} \mu_h, \tag{65}$$

となる。Eq.(65)で μ の値は h の大きさに依存するので、 μ を改めて μ_h とかいてある。したがって、Eq.(30)と Eq.(65)とから

$$\frac{1}{\mu_h} = \frac{1}{q^{0^2} - q^{i^2}} = \frac{a}{\pi} e^{-\frac{2}{a}\Lambda_0} \frac{1}{h^2}, \tag{66}$$

なる関係をうる。次に、Eq.(66)の運動量空間における期待値をとろう。計算式を見易くするために、 $\phi_q(x) = |xq>$, また、 $\phi_h(\xi) = |\xi h>$ とかくことにする。Eq.(66)の左辺の第 2 項は、

$$\begin{aligned} &\sum_{h \cdot q} |\xi h > |xq > \frac{1}{q^{0^2} - q^{i^2}} < qx'| < h\xi'| \\ &= \sum_h |\xi h > < h\xi'| \otimes \sum_q |xq > \frac{1}{q^{0^2} - q^{i^2}} < qx'| \\ &= \delta(\xi - \xi') \sum_q |xq > \frac{1}{q^{0^2} - q^{i^2}} < qx'|, \end{aligned} \tag{67}$$

ここで、 $\sum_q$ は Eq.(5)で許される q についてのみの和をとるものとする。一方、Eq.(66)の右辺は

$$\begin{aligned} &\sum_{h,q} |\xi h > |xq > \frac{a}{\pi} e^{-\frac{2}{a}\Lambda_0} \frac{1}{h^2} < qx'| < h\xi'| \\ &= \frac{a}{\pi} e^{-\frac{2}{a}\Lambda_0} \delta(x - x') \sum_h |\xi h > \frac{1}{h^2} < h\xi'| \\ &\leqq \frac{a}{\pi} e^{-\frac{2}{a}\Lambda_0} \delta(x - x') \delta(\xi - \xi'), \end{aligned} \tag{68}$$

となる。Eq.(68)の最後の行では

$$\sum_h |\xi h > \frac{1}{h^2} < h\xi'| \leqq \sum_h |\xi h > < h\xi'| = \delta(\xi - \xi'), \tag{69}$$

を用いた。以上、Eq.(67)と Eq.(68)とから、我々の model における中性中間子の 4 次元空間での propagator は

$$\sum_q |xq > \frac{1}{q^{0^2} - q^{i^2}} < qx'| \leqq \frac{a}{\pi} e^{-\frac{2}{a}\Lambda_0} \delta(x - x'), \tag{70}$$

を満たさなければならない。Eq.(70)の左辺は Eq.(19)の積分に対応する積分である。このように

して、我々の model では、中性 scalar 粒子の propagator の運動量空間における積分は発散しないことが示された。Eq.(70)で

$$\frac{a}{\pi} e^{-\frac{2}{a}\Lambda_0} \cong \frac{a}{\pi}\left(1-\frac{2}{a}\Lambda_0\right)=\frac{a}{\pi}-\frac{2}{\pi}\Lambda_0\cdots, \tag{71}$$

であるから、 $a \to \infty$ のとき Eq.(70)の積分は発散する。

4. Discussion

今後、調べる必要のある問題を列挙しておこう。

1）Eq.(3)の 5 次元超曲面は選択しうる超曲面のうちで次元が最小なものであろう。相互作用がこの超曲面上で、十分、reality のある形になっているかどうか、いいかえると、現在得られている実験値、例えば、Lamb Shift や電子の異常磁気能率等の測定値をうまく説明できるかどうか、調べる必要がある。

2）我々の model で発散が生じない一つの理由は energy momentum が ξ 空間では、一次元に縮退していて発散積分の次数が下がるからである。本義論では、 ξ についての微分 operator の一次の項は無視してきた。この一次の項は energy や momentum の減衰を生ずる項であり、この項の発散の問題への寄与について調べる必要がある。

3）自己 energy の問題と並んで電荷の真空偏極の問題は重要であり、この問題についても調べなければならない。Eq.(2)には、仮想粒子による“ゆらぎ”の効果は含まれていない。

4）現代物理学において、Gauge の考えは中心的な概念である。我々の理論は重力理論と類似の論理構造をもっている。重力場は Poincaré 変換の Gauge 場であることを考えれば、我々の理論も Gauge 場の理論であることは十分考えられる。

5）実験値の定量的な議論をするためには、我々の model space へ、電磁場や電子場の理論を拡張しておかなければならない。

6）中間状態はあいまいな状態である。そこでは、因果律が成り立たない。発散の問題は、この中間状態の問題でもある。中間状態における相互作用と real な世界における相互作用は、別のものであっても矛盾しないこともありうるのではないか。